جامعة البعث   الدورة الإضافية 2017 -2016   الاسم :

كلية العلوم _ قسم الرياضيات   بنى جبرية (٣)   المدّة : ساعة ونصف

السؤال الأول (30) درجة:

ليكن المودول M على الحلقة الواحدية التبديلية التامة R ولتكن T مجموعة عناصر الفتل في M:

$$T = \{ m \in M : \exists\ 0 \neq r \in R\ : rm = 0 \}$$

١) أثبت أن [illegible] جزئي في M.

٢) أثبت أن المودول M/T عديم الفتل.

السؤال الثاني (25) درجة:

ننظر إلى Z كمودول على ذاتها، المطلوب:

١) أوجد $5Z+7Z$ ؛ $5Z \cap 7Z$.

٢) أثبت أن Z ليس مجموعاً مباشراً لأي مودولين جزئيين غير تافهين فيه.

٣) بين إن كان هذا المودول نيوثرياً أم آرتينياً ؟

السؤال الثالث (25) درجة:

ليكن المودول M على الحلقة الواحدية R، وليكن $\alpha \in R$ والتطبيق $h_\alpha : M \longrightarrow M$، بحيث:

$$\forall x \in M\ : h_\alpha(x) = \alpha x$$

١) أوجد الشرط الواجب فرضه على R ليكون h_α هومومورفيزماً مودولياً.

٢) إذا كانت: $\alpha = 4$, $M = R = Z$ ، فأثبت أن: $Z \cong 4Z$.

السؤال الرابع (20) درجة:

نفرض أن $f \in Hom_R(M, N)$ ، والمطلوب:

١) أثبت أن المتتالية: $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M$ تامة إذا وفقط إذا كان f غامراً.

٢) إذا كان f غامراً و M نصف بسيط ، فأثبت أن N نصف بسيط أيضاً.

د.ياسين خلوف

سلم تصحيح امتحان مقرر بنى جبرية (٢). الدورة الثانية ٢٠١٦ - ٢٠١٧ — د. [illegible]

السؤال الأول (30)

1) لدينا $T=\{m\in M: \exists\, 0\neq r\in R : rm=0_M\}$

وحيث $0\neq 1\in R$ فإن $1.0_M=0_M$ ومنه $0_M\in T$ أي $T\neq\phi$.

• $\forall m_1,m_2\in T : \exists r_1,r_2\in R^* : r_1m_1=r_2m_2=0_M$ ولكن R تامة فإن $0\neq r_3=r_1r_2\in R^*$ وعندئذ يكون (لكون R تبديلية):

$$r_3(m_1-m_2)=(r_1r_2)(m_1-m_2)=(r_1r_2)m_1-(r_1r_2)m_2=(r_2r_1)m_1-(r_1r_2)m_2=r_2(r_1m_1)-r_1(r_2m_2)=r_2 0-r_1 0=0$$

ولكن $0\neq r_3\in R^*$ ومنه يكون $(m_1-m_2)\in T$

• $\forall m\in T ; \forall r\in R : \exists r_1\in R^* : r_1m=0 \Rightarrow$

$$r_1(rm)=(r_1r)m=(rr_1)m=r(r_1m)=r0=0\Rightarrow rm\in T$$

مما سبق نستنتج أن T مودول جزئي في M

2) لأن T مودول جزئي في M يمكن تعريف الفاكس M/T. لنفرض أن العنصر $m+T\in M/T$ عنصر فتل في M/T، هذا يعني وجود $r\in R^*$ بحيث أن

$$r(m+T)=0_{M/T}=T \iff rm+T=T \iff rm\in T$$

وهذا يقتضي وجود $s\in R^*$ بحيث أن $s(rm)=0_M$ أي $(sr)m=0$

ولكن R تامة و s,r مخالفان للصفر فإن $sr\neq 0$ هذا يقتضي أن $m\in T$ وعندئذ يكون $m+T=T$ ويكون عنصر الفتل الوحيد في الفاكس M/T هو T أي صفر هذا المودول ولذلك M/T عديم الفتل.

السؤال الثاني (25)

1) $5Z\cap 7Z=35Z$ حيث المضاعف المشترك الأصغر لـ $5,7$ هو 35.

$5Z+7Z=Z$ حيث القاسم المشترك الأعظم لـ $5,7$ هو 1.

2) إن تقاطع أي مودولين جزئيين في Z هو المودول الجزئي المولد بالمضاعف المشترك الأصغر للمولدين ولذلك التقاطع ليس صفراً ومن ثم Z لا يحوي مجموعاً مباشراً لمودولين جزئيين غير تافهين.

3) إن المتسلسلة $\cdots m^2Z\subset mZ\subset Z$ لا تتقطع من الأسفل ولذلك Z ليس آرتينياً [illegible] أي سلسلة متزايدة [illegible]

$n_1Z\subset n_2Z\subset\cdots$ [illegible] n_iZ [illegible] مودول جزئي [illegible] dZ حيث d القاسم المشترك [illegible]

السؤال الثالث (25)

1)

. $\forall x,y \in M: x+y \in M \Rightarrow h_\alpha(x+y) = \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y = h_\alpha(x) + h_\alpha(y)$

. $\forall \beta \in R; \forall x \in M: \beta x \in M \Rightarrow h_\alpha(\beta x) = \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

فإذا كان α تبادلي مع β (أي مع عناصر R) نجد عندئذ:

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x = (\beta\alpha)x = \beta(\alpha x) = \beta h_\alpha(x)$$

وعندئذ تكون h_α هومومورفيزم مودولي أي أن الشرط الواجب فرضه على R هو أن تكون R تبديلي أو على الأقل $\alpha \in C(R)$ (مركز الحلقة R).

2) إذا كان $\alpha = 4$ و $M = R = Z$ فإن $h_4(n) = 4n$ لكل $n \in Z$

وعندئذ $Ker(h_4)$ هي مجموعة عناصر Z التي صورها صفر أي $h_4(n) = 4n = 0$ أي $n = 0$ أي $Ker\, h_4 = \{0\}$ أي h_4 متباين.

وتكون $Im\, h_4$ هي $4Z$ ومن ثم حسب مبرهنة الإيزومورفيزمات نجد

$$Z/Ker\, h_4 \cong Im\, h_4 \Rightarrow Z/\{0\} \cong 4Z$$

أي أن $Z \cong 4Z$

السؤال الرابع (20)

1) $M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ تامة إذا وفقط إذا كان $Im\, f = Ker(N \rightarrow 0)$ ولكن $Ker(N \rightarrow 0) = N$ تماماً أي $Im\, f = N$ أي f غامر.

وكذلك إذا كان f غامر فإن $Im\, f = N$ وهي $Ker(N \rightarrow 0)$

2) بما أن M نصف بسيط فهو مجموع مباشر لمودولات بسيطة ولتكن A أحد مكوناته هذا المجموع ولنعرف $\alpha: A \rightarrow B$ (مقصور f على A) سيكون $Ker\, \alpha \subseteq A$ ولكن A بسيط فهو عديم المجاميع:

أ) $Ker\, \alpha = \{0\}$ وعندئذ تكون f تامة نجد:

$$A/Ker\, \alpha \cong Im\, \alpha = B \Rightarrow A/\{0\} \cong B \Rightarrow A \cong B$$

ولكن A بسيط سيكون B بسيطة

ب) إذا كان $Ker\, \alpha = A$ وعندئذ $0 \cong A/A \cong Im\, \alpha = B$

وبالتالي ستكون $Im\, f = N$ مجموعاً لمودولات بسيطة وأصفار ومنه يمكن إهمال الأصفار ومن ثم سيكون N نصف بسيط لأنه مجموع مودولات بسيطة.